

§11. Shodná zobrazení v E_3

Def.: Shodným zobrazením v prostoru (shodností v prostoru) nazýváme zobrazení

$Z : E_3 \rightarrow E_3$ jestliže platí:

$$\forall X, Y \in E_3 : /Z(X)Z(Y)/ = /XY/$$

Pozn.: a) Nejjednodušším shodným zobrazením v E_3 je identita.

b) Shodná zobrazení v E_3 mají stejné vlastnosti jako v E_2 .

V.11.1.: a) Každé shodné zobrazení je bijekce.

b) Inverzní zobrazení k danému shodnému zobrazení je rovněž shodné.

Pozn.: a) Obrazem libovolné bodové množiny (útvary) je též bodová množina. Tedy obrazem úsečky je úsečka, polopřímky polopřímka,...

b) Shodné zobrazení v E_3 zachovává vzájemnou polohu přímek, rovin, přímek a rovin.

V.11.2.: Necht' $p, q \subseteq E_3$ jsou přímky, necht' $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou roviny a necht' $Z : E_3 \rightarrow E_3$ je shodné zobrazení.

Necht' $p' = Z(p)$, $q' = Z(q)$; $\alpha' = Z(\alpha)$; $\beta' = Z(\beta)$, pak platí:

a) $p \perp q \Rightarrow p' \perp q'$

b) $\alpha \perp \beta \Rightarrow \alpha' \perp \beta'$

c) $p \perp \alpha \Rightarrow p' \perp \alpha'$

V.11.3.: Necht' F, G jsou shodná zobrazení v E_3 , pak složené zobrazení $H = G \circ F$ je shodné zobrazení v E_3 .

§12. Druhy shodných zobrazení v E_3

A. Středová souměrnost v E_3

Def.: Necht' $S \in E_3$ je bod, pak zobrazení $S_S : E_3 \rightarrow E_3$ nazýváme středovou souměrností se středem S, jestliže platí:

1) $X = S \Rightarrow X' = X$

2) $S \neq X \Rightarrow S$ = střed úsečky XX' , kde $X' = S_S(X)$.

V.12.1.: Středová souměrnost v E_3 je shodné zobrazení v E_3 .

V.12.2.: Středová souměrnost v E_3 je involutorní zobrazení.

(Involutorní zobrazení: $S_S \circ S_S = I(\text{identita})$; $S_S^{-1} = S_S$)

V.12.3.: Středová souměrnost v E_3 zachovává rovnoběžnost.

(To znamená, že pro $\forall p \subseteq E_3$, kde p je přímka, a $\forall \alpha \subseteq E_3$, kde α je rovina, platí:

a) $p \parallel p'$, kde $p' = S_S(p)$, přitom bod S leží v rovině, kterou přímky p a p' určují.

b) $\alpha \parallel \alpha'$, kde $\alpha' = S_S(\alpha)$.)

Pozn.: Jestliže S leží na přímce p , pak $p' = p$ a jestliže S leží v rovině α , pak $\alpha' = \alpha$ (zobrazení není bodově samodružné).

Def.: Každou neprázdnou množinu U v E_3 nazveme útvarem v prostoru.

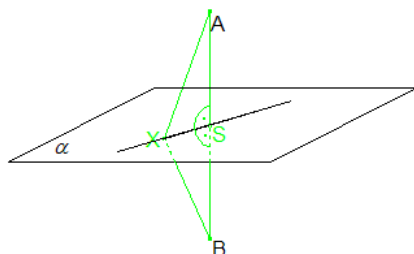
Def.: Bod $S \in E_3$ nazveme středem souměrnosti útvaru U , jestliže se zobrazí sám do sebe, tedy $U = S_S(U)$.

Útvar $U \subseteq E_3$ nazveme středově souměrným, má-li alespoň 1 střed souměrnosti.

B, Rovinová souměrnost v E_3

Def.: Necht' $A, B \subseteq E_3$ jsou dva body, $A \neq B$. Pak rovinu $\alpha \subseteq E_3$, která prochází středem úsečky AB a je k ní kolmá, nazýváme rovinou souměrnosti bodů A, B .

V.12.4.: Necht' $A, B \in E_3$ jsou dva různé body, necht' $\alpha \subseteq E_3$ je rovina souměrnosti bodů A, B . Pak platí: $\alpha = \{X \in E_3 : |AX| = |BX|\}$



Pozn.: Rovinová souměrnost je prostorovou obdobou osové souměrnosti v E_3 .

Def.: Necht' $\alpha \subseteq E_3$ je rovina, pak zobrazení $S_\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ nazýváme rovinovou souměrností s rovinou α , jestliže platí:

1) $X \in \alpha \Rightarrow X' = X$

2) $X \notin \alpha \Rightarrow \leftrightarrow XX' \perp \alpha \wedge \text{střed úsečky } XX' \in \alpha$, kde $X' = S_\alpha(X)$.

V.12.5.: Rovinová souměrnost je shodné zobrazení v E_3 .

V.12.6.: Rovinová souměrnost je involutorní zobrazení.

V.12.7.: Necht' je dána rovinová souměrnost s rovinou $\alpha \subseteq E_3$, necht' $p \subseteq E_3$ je přímka a p' její obraz, pak platí:

a) $p \parallel \alpha \Rightarrow p' \parallel p$

b) $p \perp \alpha \Rightarrow p' = p$

c) $p \not\parallel \alpha \wedge p \not\perp \alpha \Rightarrow p \cap p' \in \alpha$ (Přímky p, p' se protínají v rovině α , určují tedy rovinu kolmou k rovině α .)

V.12.8.: Necht' je dána rovinová souměrnost s rovinou $\alpha \subseteq E_3$, necht' $\rho \subseteq E_3$ je rovina a $\rho' \subseteq E_3$ je její obraz. Pak platí:

a) $\rho \parallel \alpha \Rightarrow \rho' \parallel \rho$

b) $\rho \perp \alpha \Rightarrow \rho' = \rho$

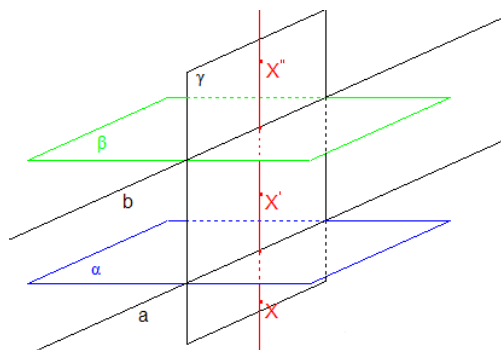
c) $\rho \not\parallel \alpha \wedge \rho \not\perp \alpha \Rightarrow \rho \cap \rho' = r$, kde r je průsečnicí rovin, a $r \subseteq \alpha$.

- Def.:** a) Rovina $\alpha \subseteq E_3$ se nazývá rovina souměrnosti útvaru $U \subseteq E_3$, jestliže $U = S_\alpha(U)$.
b) Útvar $U \subseteq E_3$ se nazývá rovinově souměrný, když má alespoň 1 rovinu souměrnosti.

C. Skládání rovinových souměrností

Pozn.: Nyní se budeme zabývat dalšími typy shodných zobrazení v E_3 , která vzniknou složením dvou rovinových souměrností podle rovin α, β .

V.12.9.: Necht' $S_\beta \circ S_\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ je složené zobrazení ze dvou rovinových souměrností s rovinami $\alpha, \beta \subseteq E_3$.
Necht' $\alpha \parallel \beta$, pak $\forall X \in E_3 : S_\beta \circ S_\alpha(X) = O_b \circ O_a(X)$, kde $a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma$, kde $\gamma \subseteq E_3$ je taková rovina, že: $\alpha \perp \gamma \wedge \beta \perp \gamma, X \in \gamma$.



Pozn.: Přímky a, b v předchozí větě jsou rovnoběžné a leží v rovině γ . V této rovině vznikne složením osových souměrností $O_b \circ O_a$ s rovnoběžnými osami posunutí ve směru kolmém na obě přímky a, b o vzdálenosti $2\rho(\alpha, \beta)$.

Def.: Složením dvou rovinových souměrností s rovnoběžnými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme posunutím (translací) v E_3 . Směr kolmý k těmto rovinám nazýváme směrem posunutí.

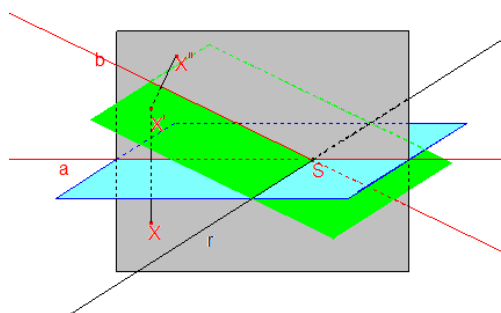
Pozn.: Identita I je tedy zvláštním případem posunutí pro $\alpha = \beta$.

V.12.10.: Necht' $T = S_\beta \circ S_\alpha$, kde $\alpha \parallel \beta, \alpha, \beta \subseteq E_3$, je posunutí v E_3 . Pak platí:

- $\forall A, B \in E_3 : /AA' / = /BB' / = 2\rho(\alpha, \beta)$
- $T \neq I$ (identita), pak $\forall A, B \in E_3 : \leftrightarrow AA' \parallel \leftrightarrow BB'$, přičemž tyto přímky tvoří směr posunutí.
- Posunutí T nemá žádný samodružný bod, pro $T \neq I$, nebo má všechny body samodružné, jestliže $T=I$.

V.12.11. Necht' $S_\beta \circ S_\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ je složené zobrazení ze dvou rovinových souměrností s rovinami $\alpha, \beta \subseteq E_3$.

Necht' $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = r$ (průsečnice), pak platí:
 $\forall X \in E_3 : S_\beta \circ S_\alpha(X) = O_b \circ O_a(X)$, kde
 $a = \alpha \cap \gamma, b = \beta \cap \gamma$, kde $\gamma \subseteq E_3$ je taková rovina, že: $r \perp \gamma, X \in \gamma$.



Pozn.: Přímky a, b z předchozí věty jsou různoběžné, protínají se v bodě $S \in a \cap b$ a leží v rovině γ . V této rovině vznikne složením osových souměrností $O_b \circ O_a$ s různoběžnými osami a, b otočení se středem S o úhel $\angle XSX' = 2\alpha$, kde α je velikost orientovaného úhlu, který svírají osy a, b . (Není to odchylka, protože to může být i úhel tupý.) Tedy celé zobrazení $S_\beta \circ S_\alpha$ se děje v rovině γ , kolmé na průsečnici r rovin α a β .

Def.: Složením dvou rovinových souměrností s různoběžnými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme otočením, (rotací) v E_3 . Průsečnici těchto rovin nazýváme osou otočení.

Pozn.: Jestliže $\alpha \perp \beta$, dostáváme zvláštní případ otočení – osovou souměrnost v E_3 .

V.12.12.: Necht' $R = S_\beta \circ S_\alpha$, kde $\alpha \nparallel \beta$ je otočení v E_3 . Pak platí:

- $\forall A, B \in E_3 : \angle ASA' = \angle BSB'$, kde S je průnik trsu rovin α, β, γ , kde $\gamma \perp \alpha \wedge \gamma \perp \beta$.
- Všechny vzory X a jejich obrazy X' leží v rovině γ kolmé k α i β (kolmé k jejich průsečnici).
- Všechny body průsečnice r rovin α, β jsou v zobrazení R samodružné.

V.12.13.: Necht' $S_\beta \circ S_\alpha : E_3 \rightarrow E_3$ je složené zobrazení ze dvou rovinových souměrností s rovinami $\alpha, \beta \subseteq E_3$.

Necht' $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$ (průsečnice), pak zobrazení $S_\beta \circ S_\alpha$ má tyto vlastnosti:

- $X \in r : X = X'$
- $X \notin r : XX' \perp r$, střed úsečky XX' leží na r , kde $X' = S_\beta \circ S_\alpha(X)$.

Def.: Složením dvou rovinových souměrností s navzájem kolmými rovinami souměrnosti vznikne zobrazení, které nazýváme osovou souměrností v E_3 . Průsečnici těchto rovin nazýváme osou osové souměrnosti.

Pozn.: Osová souměrnost je další, tedy již třetí, druh souměrnosti v E_3 . Za její definici se častěji používá V.12.13.

Def.: a) Přímka $p \subseteq E_3$ se nazývá osa souměrnosti útvaru $U \subseteq E_3$, jestliže útvar U je samodružný v osové souměrnosti s osou p .
b) Útvar $U \subseteq E_3$ se nazývá osově souměrný, má-li alespoň 1 osu souměrnosti.

Pozn.: Každé shodné zobrazení v E_3 lze vyjádřit jako složení rovinových souměrností. První souměrnost zvolíme tak, aby se bod A zobrazil na A' , druhou tak, aby se při složeném zobrazení zobrazil bod B na B' a bod A' aby zůstal samodružný, ...

§13. Podobná zobrazení v E_3 , stejnolehlost

Def.: Podobným zobrazením v prostoru (podobností v prostoru) nazýváme zobrazení $Z : E_3 \rightarrow E_3$, jestliže existuje $k \in R^+ : \forall X, Y \in E_3 : /Z(X)Z(Y)/ = k /XY/$. Číslo k nazýváme koeficientem podobnosti.

Pozn.: a) Každé shodné zobrazení je tedy podobné pro $k=1$.
b) Podobná zobrazení v E_3 mají stejné vlastnosti jako v E_2 .

V.13.1.: a) Každé podobné zobrazení v E_3 je bijekce.
b) Inverzní zobrazení k danému podobnému zobrazení je rovněž podobné, má koeficient $\frac{1}{k}$, pokud původní má k .

V.13.2.: Necht' F, G jsou podobná zobrazení v E_3 s koeficienty k_1, k_2 . Pak složené zobrazení $H=G \circ F$ je rovněž podobné zobrazení s koeficientem $k = k_1 \cdot k_2$.

V.13.3.: Necht' $A, B, C, D \in E_3$ jsou 4 nekomplanární body, necht' $A', B', C', D' \in E_3$ jsou jejich obrazy v podobném zobrazení s koeficientem k . Pak platí:

a) $/A'B'/' = k \cdot /AB/$

b) $S_{\Delta A'B'C'} = k^2 \cdot S_{\Delta ABC}$

c) $V_{A'B'C'D'} = k^3 \cdot V_{ABCD}$,

kde $S_{\Delta ABC}$ je obsah trojúhelníku ABC , V_{ABCD} je objem čtyřstěnu $ABCD$.

Pozn.: a) Tedy při podobnosti s koeficientem k se délky zvětší k -krát, obsahy a povrchy se zvětší k^2 -krát a objemy se zvětší k^3 -krát.
b) Je-li povrch tělesa S , jeho objem V , pak poměr $\frac{S^3}{V^2}$ je stejný pro těleso i jeho obraz v libovolné podobnosti.

Stejnolehlost v E_3

Def.: Necht' $S \in E_3$ je bod, $\lambda \in R \setminus \{0\}$ je číslo. Zobrazení $H_{S,\lambda} : E_3 \rightarrow E_3$ se nazývá stejnolehlostí (homotetií) se středem v bodě S a koeficientem λ , jestliže platí:

1) $X = S \Rightarrow X' = X = S$

2) $X \neq S \Rightarrow /SX'/' = / \lambda / \cdot /SX/$, přičemž i) $\lambda > 0$, pak X' leží na polopřímce $\rightarrow SX$
ii) $\lambda < 0$, pak X' leží na polopřímce opačné k $\rightarrow SX$,

kde $X' = H_{S,\lambda}(X)$

V.13.4.: Stejnolehlost v E_3 je podobné zobrazení v E_3 s koeficientem podobnosti $k = / \lambda /$.

V.13.5.: Stejnolehlost v E_3 zachovává rovnoběžnost přímek a rovin. To znamená, že

$$\forall p, \alpha \subseteq E_3 : p \parallel p', \text{ kde } p' = H_{S,\lambda}(p)$$

$$\alpha \parallel \alpha', \text{ kde } \alpha' = H_{S,\lambda}(\alpha).$$

Pozn.: Všechna podobná zobrazení v E_3 lze vyjádřit složením stejnolehlosti a shodnosti, nebo shodnosti a stejnolehlosti (vždy lze oběma způsoby).